数理解析研究所講究録
383巻 1980年 57-63

$H^p(\mathbb{R}^n)$ と tube domain 上の H^p

茨城大学理学部 藪田公三

ここでは，次の Carleson-Coifman-Weiss の定理，([2, P.585] では簡単に証明の概略が与えられている)，の証明を与えることを目的とする。$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ が open cone であるとは $\Gamma \neq \emptyset$, $\alpha, \beta > 0$, $x, y \in \Gamma$ なら $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ となることをいう。$\Gamma^* \equiv \{ y \in \mathbb{R}^n ; x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geqq 0, \forall x \in \Gamma \}$ とおき，Γ の dual cone という。Γ^* の内点全体の閉包が Γ^* になるとき，Γ は regular cone といわれる。以下 Γ は常に regular open cone を表わす。$T_\Gamma \equiv \{ z = x + iy = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \cdots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n ; x \in \mathbb{R}^n, y \in \Gamma \}$ とし，$H^p(T_\Gamma) \equiv \{ u(x,y) = u(x+iy) ;$ holomorphic in T_Γ & $\| u \|_{H^p(T_\Gamma)} = \sup_{y \in \Gamma} \left(\int |u(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \}$ とおく。($p > 0$)。

<u>定理</u> (Carleson-Coifman-Weiss). $0 < p$ 。$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ は regular open cones で $(\Gamma_1^*)^\circ \cup \cdots \cup (\Gamma_k^*)^\circ = \mathbb{R}^n / \{0\}$ とする。すると

$$f \in H^p(\mathbb{R}^n) \iff \exists u_j \in H^p(T_{\Gamma_j}) \quad j = 1, 2, \cdots, k \quad \text{s.t.}$$
$$f = \sum_{j=1}^{k} \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma_j}} u_j(x+iy)$$

(右辺の lim は超函数の意味である。)

証明の準備として，いくつかの定義を述べる。

$$K_\Gamma(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t}\,dt \quad (\text{Cauchy kernel})$$

$$\mathcal{P}_\Gamma(x,y) = \frac{|K_\Gamma(x+iy)|^2}{K_\Gamma(2iy)} \quad (\text{Poisson kernel})$$

$\mathcal{P}_\Gamma(x,y)$ の x についての Fourier 変換は

$$\hat{\mathcal{P}}_\Gamma(\xi,y) = \frac{e^{-2\pi y\cdot\xi}}{K(2iy)}\int_{\{\xi-\Gamma^*\}\cap\{-\Gamma^*\}} e^{4\pi y\cdot t}\,dt \left(= e^{-2\pi|y\cdot\xi|},\ \xi\in\Gamma^*\cup(-\Gamma^*)\right)$$

で，とくに $\Gamma_0 = \{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1>0,\cdots,x_n>0\}$（以下常に Γ_0 はこれを表わす）に対しては，

$$\mathcal{P}_{\Gamma_0}(x,y) = \prod_{j=1}^n \frac{y_j}{\pi(x_j^2+y_j^2)},\quad \hat{\mathcal{P}}_{\Gamma_0}(\xi,y) = e^{-2\pi(y_1|\xi_1|+\cdots+y_n|\xi_n|)}。$$

さて，定理の証明の（$\Leftarrow$）には

① $u\in H^p(T_\Gamma) \Rightarrow \exists \lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Gamma}} u(x+iy) \underset{\text{in } \mathcal{S}'}{=} f \in H^p(\mathbb{R}^n)$

（$\Leftarrow$）には $\{|y|=1\}$ の開被覆 $\{(\Gamma_j^*)^\circ \cap \{|y|=1\};\ j=1,\cdots,k\}$ に対する滑らかな 1 の分解を $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$ とし，$\Phi_j(\xi) = \varphi_j(\frac{\xi}{|\xi|})$ とおくと，Fefferman-Stein [5, Th 12] により $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ なら $(\Phi_j(\xi)\hat{f}(\xi))^\vee \in H^p(\mathbb{R}^n)$ となる。したがって

② $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ & $\operatorname{supp}\hat{f}\subset\Gamma^* \Rightarrow u(x,y) \equiv \int \hat{f}(\xi)e^{-2\pi\xi\cdot y}e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi \in H^p(T_\Gamma)$

を示せば①と合せて結論を得る。さて，①の証明に入る。

<u>Lemma 1.</u> $u(x,y)\in H^p(T_\Gamma)$，$\Gamma'\subset\subset\Gamma$ のとき，

$$|u(x,y)| \le C_{\Gamma'}\|u\|_{H^p(T_\Gamma)}|y|^{-\frac{n}{p}} \quad (x,y)\in T_{\Gamma'}。$$

とくに，$\Gamma=\Gamma_0$ のときは

$$|u(x,y)| \leqq C_{\Gamma_0} \|u\|_{H^p(T_{\Gamma_0})} (y_1\cdots y_n)^{-\frac{1}{p}} \qquad (x,y)\in T_{\Gamma_0}.$$

∵) $\delta = \sup\{\gamma>0\,;\ \{y;\ |y-y'|<\gamma|y'|\}\subset\Gamma,\ {}^\forall y'\in\Gamma'\}$ とおく。$\delta>0$ となる。$(x_0,y_0)\in T_{\Gamma'}$ に対して $B=\{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2 \leqq (\frac{\delta}{2})^2|y_0|^2\}$ として，$|u(x,y)|^p$ が T_Γ で各変数について subharmonic となり，とくに subharmonic であるから

$$|u(x_0,y_0)|^p \leqq \frac{1}{|B|}\iint_B |u(x,y)|^p\,dxdy \leqq \frac{C'_\delta}{|y_0|^{2n}} \int_{|y-y_0|\leqq\frac{\delta}{2}|y_0|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,y)|^p\,dx\right)dy$$

$$\leqq \frac{C''_\delta}{|y_0|^{2n}}\|u\|^p_{H^p(T_\Gamma)}\cdot|y_0|^n = C''_\delta\|u\|^p_{H^p(T_\Gamma)}|y_0|^{-n}.$$

Γ_0 に対しては，$B=\prod_{j=1}^n B_j$，$B_j=\{|x_j-x_{0j}|^2+|y_j-y_{0j}|^2<y_j^2\}$ に対して，$|u(x,y)|^p$ が各変数について subharmonic なことより，同様にして結論を得る。

Lemma 2　$u(x,y)\in H^p(T_\Gamma)$ ならば

$\exists f\in\mathcal{S}'$ s.t. $u(x,y)\longrightarrow f$ (in $\mathcal{S}'$) ($y\to0$, $y\in\Gamma$) &

$\mathrm{supp}\,\hat f\subset\Gamma^*$, $\hat f\in C(\mathbb{R}^n)$, $|\hat f(\xi)|\leqq A|\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)}$

ただし $0<p\leqq1$.

∵) Lemma 1 より $y\in\Gamma$ ならば $u(x,y)\in L^p\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ したがって，$\delta\in\Gamma$ ならば $u(x,y+\delta)\in H^2(T_\Gamma)$，よって $\mathrm{supp}\,\hat u(\xi,\delta)\subset\Gamma^*$ で $u(x,y+\delta)=u(\cdot,\delta)*P_\Gamma(\cdot,y)(x)$。したがって $\hat u(\xi,y+\delta) = \hat u(\xi,\delta)\hat P_\Gamma(\xi,\delta)=\hat u(\xi,\delta)e^{-2\pi\xi\cdot y}$（準備の所で注意したように Γ^* 上で $\hat P_\Gamma(\xi,y)=e^{-2\pi\xi\cdot y}$）．よって $\hat u_0(\xi)\equiv\hat u(\xi,\delta)e^{2\pi\xi\cdot\delta}$ とおくと，$\hat u_0(\xi)$ は $\delta\in\Gamma$ に無関係である。又 Lemma 1 を使って

$|\hat{u}_0(\xi)e^{-2\pi\xi\cdot\delta}| = |\hat{u}(\xi,\delta)| \leq \int |u(x,\delta)|dx \leqq C_\delta (\|u\|_{H^p(T_\Gamma)}|\delta|^{-\frac{n}{p}})^{1-p} \times$

$\int |u(x,\delta)|^p dx \leqq C_\delta \|u\|_{H^p(T_\Gamma)}|\delta|^{-\frac{n}{p}(1-p)}$。 ここで $\eta\in\Gamma$ を一つ固定し、$\delta = \frac{\eta}{|\xi|}$ とすれば C_δ は定数で

(1) $|\hat{u}_0(\xi)| \leqq C_\eta \|u\|_{H^p(T_\Gamma)} |\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)}$。

ところで、$\varphi\in\mathcal{S}$ とすると

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\xi)e^{-2\pi\xi\cdot y}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

で、右辺は $y\to 0,\ y\in\Gamma$ のとき (1) より $\int \hat{u}_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi$ に収束するから、$f=(\hat{u}_0)^\vee$ とすれば Lemma が成り立つ。

注意 $f=0 \Rightarrow u=0$.

① を示すには後 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ を示せばよい。 $H^p(\mathbb{R}^n)$ は一次変換で不変なことより、$\Gamma=\Gamma_0$ の場合に示しておけば、$A\Gamma\supset\Gamma_0$ となるように一次変換 A をすれば任意の Γ についていえる。

そこで $u(x,y)\in H^p(T_{\Gamma_0})$ $f=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Gamma_0}} u(x,y)$ (in $\mathcal{S}'$) とする。

この時 $|u(x,y)|^{\frac{p}{2}}$ は各 (x_j,y_j) について subharmonic で

$$\sup_{y\in\Gamma_0}\int (|u(x,y)|^{\frac{p}{2}})^2dx < +\infty \quad \text{だから}$$

$$|u(x,y+\delta)|^{\frac{p}{2}} \leqq P_{\Gamma_0}(\cdot,y) * |u(\cdot,\delta)|^{\frac{p}{2}}(x)$$

$\delta\to 0$ として $\exists g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ s.t. $|u(x,y)|^{\frac{p}{2}} \leqq P_{\Gamma_0}(\cdot,y)*g(x)$.

したがって $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ だから

(2) $\sup_{\substack{|x_j-z_j|<y_j\\ j=1,2,\cdots,n}} |u(x,y)|^{\frac{p}{2}} \leqq M_1M_2\cdots M_n g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

M_j は x_j についての Hardy-Littlewood の maximal function である。

さて，$\psi(s)$ は $+\infty$ で急減少で $\int_1^\infty \psi(s)s^k ds = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1,2,\cdots \end{cases}$ を満すものとする。このとき，

$\varphi_t(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \psi(s)\frac{ts}{x^2+t^2s^2}ds \left(= \frac{1}{t}\varphi_1\left(\frac{x}{t}\right)\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である（[5. p.187]）。

$\Phi_t(x) = \prod_{j=1}^n \varphi_t(x_j)$ とおけば，これは $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に入り，$\Phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\Phi_1\left(\frac{x}{t}\right)$。

又 $\hat{\Phi}_t(\xi) = \int_1^\infty\cdots\int_1^\infty \psi(s_1)\cdots\psi(s_n)e^{-2\pi s_1 t|\xi_1|}\cdots e^{-2\pi s_n t|\xi_n|}ds_1\cdots ds_n$ で $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_1(x)dx = 1$

である．そこで，$u(x,y)\to f$ in $\mathcal{S}'$ $(y\to 0, y\in\Gamma)$ で，$\hat{f}\in C(\mathbb{R}^n)$，

$\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset\overline{\Gamma_0}$，$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)e^{-2\pi\xi\cdot y}$ であったから，

$$(\Phi_t * f)^\wedge = \hat{\Phi}_t(\xi)\hat{f}(\xi) = \int_1^\infty\cdots\int_1^\infty \psi(s_1)\cdots\psi(s_n)\hat{f}(\xi)e^{-2\pi s_1 t|\xi_1|}\cdots e^{-2\pi s_n t|\xi_n|}ds_1\cdots ds_n$$

$$= \int_1^\infty\cdots\int_1^\infty \psi(s_1)\cdots\psi(s_n)\hat{u}(\xi, ts)ds_1\cdots ds_n \text{。}$$

故に
$$\Phi_t * f = \int_1^\infty\cdots\int_1^\infty \psi(s_1)\cdots\psi(s_n)u(x,ts)ds_1\cdots ds_n$$

よって
$$\sup_{t>0}|\Phi_t * f| \leqq \sup_{y\in\Gamma_0}|u(x,y)|\int_1^\infty\cdots\int_1^\infty \psi(s_1)\cdots\psi(s_n)ds_1\cdots ds_n = \sup_{y\in\Gamma_0}|u(x,y)|$$

右辺は (2) より $L^p(\mathbb{R}^n)$ に入る。よって [5. Th 1] により $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$。

② の証明

Lemma 3. $p_0, p>0$ とする。$u\in H^{p_0}(T_{\Gamma_0})$ で $\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Gamma_0}} u(x,y)$ が殆んど全ての x について存在して，極限函数 $\underbrace{}_{f(x)}$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば $u(x,y)\in H^p(T_{\Gamma_0})$ で

$$\sup_{y\in\Gamma_0}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,y)|^p dx \leqq \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx \text{。}$$

証明は [3, Th 5.1] を使って、Stein-Weiss [4, Th C] の証明のようにすればよい。

さて、$f\in H^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp}\,\hat{f}\in\overline{\Gamma_0}$ とする。$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi\xi\cdot y}\times e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi$ とおいたとき、$u(x,y)\in H^p(T_{\Gamma_0})$ が示すべきことであった。$\varphi(x)=e^{-\pi|x|^2}\in\mathcal{S}$, $\varphi_t(x)=\frac{1}{t^n}\varphi(\frac{x}{t})$ とおく。$f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ だから $\sup_{t>0}|f*\varphi_t(x)|\in L^p$ & $|\hat{f}(\xi)|=O\left(|\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)}\right)$ [5] となる。したがって、各 $\delta>0$ に対して $(f*\varphi_\delta)^\wedge(\xi)=\hat{f}(\xi)e^{-\pi|\delta\xi|^2}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ となるから $f*\varphi_\delta\in L^1\cap L^\infty\subset L^1\cap L^2$。又、$\mathrm{supp}\,(f*\varphi_\delta)^\wedge\subset\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset\overline{\Gamma_0}$ であるから、Paley-Wiener の Th [7] により

$$u_\delta(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}(f*\varphi_\delta)(x-t)P_{\Gamma_0}(t,y)\,dt\in H^2(T_{\Gamma_0})$$

よって Lemma 3 により

$$\int|u_\delta(x,y)|^p dx\le\int|f*\varphi_\delta(x)|^p dx\le\underbrace{\int\sup_{t>0}|f*\varphi_t(x)|^p dx}_{M_f}<+\infty$$

$\delta\to 0$ とすると $u_\delta(x,y)\to u(x,y)$ (各点毎に) となるから、Fatou の補題により $\int|u(x,y)|^p dx\le M_f$。よって $u(x,y)$ が T_{Γ_0} で正則なことはよいから、$u\in H^p(T_{\Gamma_0})$。(終り)

最後に、数理研考究録366の中の「$H^p(\mathbb{R}^n)$についての一注意」で P_Γ の性質として書いた性質(6)は誤りでした。したがって、結果と書いた部分も片側だけしか正しくありません。ここを借りて、お詫びして訂正いたします。

参考文献

[1]. L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Advances Math. 22 (1976), 269–277.

[2] R.R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, B.A.M.S. 83 (1977), 569–645.

[3] E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press 1971.

[4] E.M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I, Acta Math. 103 (1960), 25–62.

[5] C. Fefferman and E.M. Stein, H^1 spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137–193.